Četvrti domaći zadatak iz predmeta Linearna algebra 1

Preduslov: Pročitati udžbenik do kraja četvrtog paragrafa četvrte glave (tj. do matrice operatora)

1. Razmotrimo operator $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3)$ zadat sa:

$$\mathcal{T}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 3x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}.$$

a) Pokazati da je $\mathcal{T}$ linearni operator.
b) Naći $Im\,\mathcal{T}$ i $Ker\,\mathcal{T}$.

2. Razmotrimo operator $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2)$ zadat sa:

$$\mathcal{T}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 2x_2 + x_3 + 1 \end{pmatrix}.$$

Provjeriti da li je $\mathcal{T}$ linearni operator.

3. Neka je $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3)$ zadat sa

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Naći $Ker\,\mathcal{A}$ i $Im\,\mathcal{A}$.

4. Razmotrimo operator diferenciranja na prostoru polinoma $\mathcal{D} \in \mathcal{L}(M_{\leq n} \to M_{\leq n-1})$.
Naći $Ker\,\mathcal{D}^k$ za prirodne brojeve k.

5. Da li je operacija množenja operatora komutativna? Navesti primjer.

6. Neka je $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(V \to V)$ takav da $rank\,\mathcal{T}^2 = rank\,\mathcal{T}$. Tada je $Ker\,\mathcal{T} \cap Im\,\mathcal{T} = \{\Theta\}$. Dokazati.

7. Navesti primjer operatora $\mathcal{G}$ takvog da $Ker\,\mathcal{G} = Im\,\mathcal{G}$.

8. Operator $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(M_{\leq 2} \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ je zadat sa

$$\mathcal{T}f = \begin{pmatrix} f(1) - f(2) & 0 \\ 0 & f(0) \end{pmatrix}$$

Naći $Im\,\mathcal{T}$.

8. Operator $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ je regularan ako i samo ako $\mathcal{A}$ svaki linearno nezavisan sistem slika u linearno nezavisan sistem. Dokazati.